Geschichte und Kritik des Lagrange'schen Problems

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde von
der Hohen Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Berlin

Von

Joachim Scholz
aus Berlin

Tag der Promotion: 27. Mai 1927

LEIPZIG ▫ JOHANN AMBROSIUS BARTH ▫ 1927

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

A. Einleitung

Das Problem der Geschoßbewegung im Rohr suchte Lagrange im Jahre 1793 dadurch zu lösen, daß er sich das folgende Problem vorlegte:

In einer zylindrischen Röhre, die am einen Ende durch eine feste Wand, am anderen durch einen beweglichen, zunächst arretierten, Stempel verschlossen ist, befinde sich ein ideales Gas unter hohem Druck, der in allen Teilen der Gasmasse gleichmäßig herrscht. Wenn nun der Stempel freigelassen wird, so ist für jeden Augenblick:

1. die Lage des Stempels, seine Geschwindigkeit und der auf ihn wirkende Druck,

2. die Geschwindigkeit, Dichte und der Druck der Gasmasse in allen ihren Punkten zu ermitteln unter der Annahme, daß:

1. die Röhre und der Kolben für Wärme undurchlässig seien,

2. die Temperatur im Anfangszustand für das Gas überall gleich sei, und

3. der Kolben resp. Stempel sich ohne Reibung bewege.

Die Hauptschwierigkeit einer rationellen Lösung des Problems der Geschoßbewegung im Rohr liegt aber nicht in diesem Problem von Lagrange, sondern in der Brücksichtigung der nicht plötzlichen sondern allmählich vor sich gehenden Vergasung des Pulvers im Rohr. Nachdem zunächst Piobert die Verbrennungsgeschwindigkeit von Pulverkörpern verschiedener Form in Abhängigkeit von dieser studiert hatte, ohne indessen den Einfluß des Druckes auf dieselbe zu berücksichtigen, wurden Gesetze der Vergasung von Pulver verschiedener Form in der Abhängigkeit vom Druck in die Bewegungsgleichung des Geschosses eingeführt und zuerst von Sarrau die auf die allmähliche Verbrennung des Pulvers Rücksicht nehmenden Grundgleichungen aufgestellt.

Nach der Formulierung des Hauptproblems trat das Lagrangesche Problem für die innere Ballistik in den Hintergrund; es bildete nunmehr ein sekundäres Problem, dessen Lösung für gewisse extreme Fälle einen Aufschluß darüber geben könnte, wie sich in jedem Augenblick der Druck innerhalb der Gasmasse verteilt.

Obwohl somit für die Ballistik das Lagrangesche Problem nur von sekundärer Bedeutung ist, so besitzt der Vorgang der Expansion eines unter hohem Druck stehenden Gases bei Beschleunigung eines Stempels doch ein allgemein physikalisches Interesse.

Es sollen daher die neueren Lösungen dieses Problems kurz besprochen und im Anschluß daran

eine Darstellung gegeben werden, welche gegenüber den bisherigen Lösungen die Vorzüge größerer Durchsichtigkeit besitzt. Im Anschluß daran sollen die Ergebnisse auch durch Beispiele erläutert werden.

B. Ableitung der Hauptgleichung

Der Anfangspunkt des Koordinatensystems sei, wie sich später als zweckmäßig erweisen wird, nicht in der im Raum festen Grundfläche, sondern in der Fläche des bewegten Stempels gelegen. Es sei also ein bewegliches Koordinatensystem eingeführt, so daß zur Zeit $t = 0$ die Grenzfläche die Koordinante $x = 0$ habe. Wenn dann der Stempel seine Bewegung antritt, so dehnt sich kurz hinter der Grenzfläche desselben das Gas aus und diese Ausdehnung pflanzt sich durch die ganze Röhre fort. Irgendeine Gasschicht im Rohr wird dann einerseits einer Translation, andererseits einer Dilation unterworfen sein. Sie befindet sich (vgl. Abb. 1) zu Anfang in Ruhe, ihre Dicke sei dx und

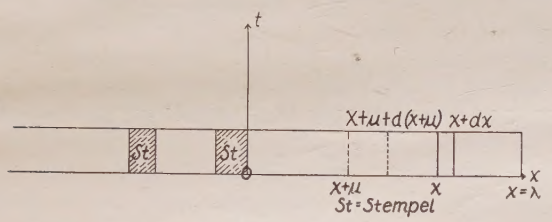


Abb. 1. Lage des Stempels und einer Gasschicht zu zwei verschiedenen Zeiten

ihre Begrenzungen: x und $x + dx$. Nach einer Zeit t haben die Begrenzungsflächen x und $x + dx$ die Stellen $x + u$ und $x + u + dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$ erreicht. Daher wird die Schichtdicke jetzt dargestellt durch den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} x + u + dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - (x + u) &= dx \\ + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx &= dx \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Man erkennt daraus, daß $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$ die Zunahme der Schichtdicke ausdrückt. Daher geht das Anfangsvolumen $v_0 = q \cdot dx$ der Schicht nach einer derartigen Veränderung über in:

$$V = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot q \cdot dx \quad (2)$$

so daß, wenn ϱ_0 die ursprüngliche Dichte bezeichnet,

$$\varrho_0 : \varrho = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

ist.

Man betrachte nun die auf die Schicht wirkenden Kräfte; auf die Begrenzungsfläche bei x wirkt die Kraft $q \cdot p$; auf die Fläche bei $x + dx$ die Kraft $q \cdot \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right)$, wenn p den zur Zeit t am Orte x vorhandenen Druck bezeichnet. Da für die Bewegung der Schicht die tangentiellen Kräfte nicht in Betracht kommen, so ist die gesamte auf die Schicht wirkende Kraft:

$$q \cdot \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right)\right] = -q \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx. \quad (4)$$

Dieser resultierenden Kraft muß der Trägheitswiderstand für die betrachtete Schicht das Gleichgewicht halten. Dieser läßt sich mit Einführung der Anfangsdichte ϱ_0 dieser Schicht, die nach Voraussetzung auch die ursprüngliche Dichte der ganzen Gasmasse ist, schreiben:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot q \cdot dx. \quad (5)$$

Die Gleichsetzung beider Kräfte nach dem d'Alembertschen Prinzip gibt somit die Gleichung:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \text{ oder } \varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Da nun p eine Funktion der Dilatation: $1 + \frac{\partial u}{\partial x}$ und somit von $\frac{du}{dx}$ also:

$$p = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (7)$$

sein muß, so folgt:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (8)$$

Für die im Gleichgewichtszustand erfolgende adiabatische Entspannung gilt zum Beispiel das Gesetz:

$$p \cdot \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\varkappa} = p_0 \cdot \left(\frac{1}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} \quad (9)$$

daher ist:

$$p = p_0 \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\varkappa} = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (10)$$

und die allgemeine Differentialgleichung (8):

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \\ &= -\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

geht für diesen Fall in die Gleichung:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\varkappa} \quad (12)$$

über.

Daß die Gleichung (9) auch für unsern Fall gilt, wird nach Hugoniot von Gossot und Liouville folgendermaßen gezeigt:

Wenn nämlich die Bewegung einer Gasschicht einsetzt, so muß, falls dieselbe in stetiger Weise vor sich geht, der Betrag der Änderung ihrer gesamten Energie gleich sein dem Änderungsbetrage der Arbeit aller an der Schicht wirksamen äußeren Kräfte. Es zeigt sich dann, daß eine Ableitung der adiabatischen Entspannungsgleichung aus dieser Anwendung des Energieprinzips entwickelt werden kann:

Die Gesamtenergie, die sich ja aus der kinetischen und potentiellen Energie einer Gasschicht zusammensetzt, erhält man zu:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \varrho_0 \cdot q \cdot dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c_v T$$

wenn man bedenkt, daß die kinetische Energie:

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{1}{2} \cdot \varrho_0 \cdot q \cdot dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

und die potentielle Energie:

$$u = c_v T$$

ist. Mit Hilfe des Gasgesetzes:

$$p \cdot v = RT$$

wird:

$$u = \frac{1}{R} \cdot c_v \cdot p \cdot v .$$

Da nun aber:

$$R = c_p - c_v$$

mithin:

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\varkappa - 1}$$

und:

$$v = q \cdot dx \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ist, folgt somit für die potentielle Energie:

$$u = \frac{p \cdot q \cdot dx}{\varkappa - 1} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

und daher:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \varrho_0 q \cdot dx \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa - 1} \cdot p \cdot q \cdot dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) .$$

Nach einer Zeit dt hat sich der Betrag von E vergrößert um:

$$dE = \varrho_0 q \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot dx \cdot dt + \frac{1}{\varkappa - 1} \cdot q \cdot dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[p \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \cdot dt .$$

Da nun die Arbeit der äußeren Kräfte ihrerseits ausdrückbar ist durch:

$$p \cdot q \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt$$

so hat sie sich in der Zeit dt, in der die betrachtete Schicht um dx fortgerückt ist, vermindert um:

$$q \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx \cdot dt + p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot dx \cdot dt\right] .$$

Dementsprechend hat man jetzt:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[p \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 .$$

Man erkennt leicht, daß die beiden mit $\frac{\partial u}{\partial t}$ multiplizierten Glieder die linke Seite der allgemeinen Hauptgleichung (6) darstellen — infolgedessen verschwinden. Es bleibt übrig:

$$\frac{1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varkappa - 1} \cdot p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

oder:

$$\frac{1}{\varkappa - 1} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 . \quad (\alpha)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\varkappa - 1}$$

so kommt:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\varkappa} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \varkappa \cdot p \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\varkappa - 1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[p \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\varkappa}\right] = 0 .$$

Die Integration ergibt:

$$p \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\varkappa} = f(x) . \quad (\beta)$$

Wählt man die Funktion $f(x)$, die ja an und für sich ganz beliebig sein kann, so, daß für $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ gerade der Anfangsdruck $p = p_0$ gilt, mit anderen Worten, setzt man:

$$f(x) = p_0$$

so folgt aus (β):

$$p = p_0 \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\varkappa}$$

also die adiabatische Entspannungsgleichung, die daher für unser Problem als geltend angenommen werden darf.

C. Lösung der Hauptgleichung

Die Lösung der Hauptgleichung (12) ist besonders dadurch erschwert, daß die Grenzbedingungen am Stempel sich fortlaufend ändern und daß man es im Gegensatz zu den akustischen Wellen hier mit endlichen Dilatationen zu tun hat. Um eine Lösung zu finden, hat man nach Gossot und Liouville folgenden Gedankengang durchzuführen: Man denke sich (s. Abb. 2) für einen

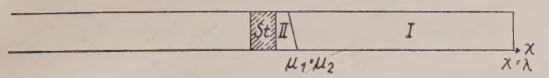


Abb. 2. Ineinander übergehen der Lösungen I und II

gegebenen Augenblick eine Lösung I der Gleichung (11) bzw. (12) gefunden, welche den in diesem Augenblick am Stempel gegebenen Grenzbedingungen genügt. Der Stempel bewegt sich indessen und es müßte für die ihn berührenden Gasschichten unmittelbar darauf bereits eine den veränderten Grenzbedingungen entsprechende Lösung II gelten. Wenn es möglich ist eine allgemeine Lösung des Problems zu finden, bei welcher die Lösungen I und II nicht diskontinuirlich aufeinander folgen, sondern so, das auf einer gewissen Grenzfläche die Lösungen I und II stetig ineinander übergehen, so daß auf dieser Grenzfläche und nur auf dieser die Lösungen I und II identisch sind, so soll diese Bewegung als die dem physikalischen Problem entsprechende angesehen werden. Dann gilt auf dieser Grenzfläche für die beiden Lösungen u_1 und u_2:

$$u_1 = u_2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{13}$$

Führt man eine neue Funktion $U(x, t)$ ein, derart, daß:

$$U = u_1 - u_2 \tag{14}$$

ist, so gilt an der Grenzfläche der Lösungen I und II die Beziehung:

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Elimination von $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}$ liefert dann:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{17}$$

gültig auf der Trennungsfläche und nur für diese, oder anders geschrieben:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{17a}$$

Hierin stellt nun $\frac{dx}{dt}$ nichts anderes als die unbekannte Geschwindigkeit der Grenzfläche dar. Bedenkt man aber, daß $U = u_1 - u_2$ auch eine Lösung der Hauptgleichung (12) ist, so läßt sich auch für letztere schreiben:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\varphi'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{18}$$

Daraus findet man:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{1}{\varrho_0} \cdot \varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{19}$$

Ein Blick auf (17a) zeigt, daß, wenn noch zur Abkürzung $\frac{du}{dx} = z$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{-\varphi'(z)}{\varrho_0}} \tag{20}$$

ist.

Auf der Grenzfläche gilt ferner, wenn $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ gesetzt wird, die Beziehung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{21}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{22}$$

weil hier $u = u_1 = u_2$ eine stetige Funktion von x und t ist, sofern man sich gewissermaßen auf die mit der Zeit fortschreitende Grenzfläche beschränkt. Die Elimination von $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ ergibt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \tag{23}$$

da nun nach (20):

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{\varrho_0} \cdot \varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ist, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ + \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Das zweite und dritte Glied der rechten Seite verschwindet aber identisch nach (11) und somit folgt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{25}$$

Es ist daher mit Rücksicht auf (20):

$$\frac{dv}{dt} = \pm \sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{26}$$

Die Gleichungen (26) lassen aber eine Integration zu. Man erhält:

$$v + \psi(z) = \alpha \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} \tag{27}$$

und:

$$v - \psi(z) = \beta \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = +\sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} \tag{28}$$

wobei:

$$\psi(z) = \int \left| \sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} \right| dz \tag{29}$$

gesetzt wurde.

Je nachdem nun die Gleichungen (27) oder (28) als geltend angenommen werden, hat man ein Lösungssystem für die Grenzfläche, wobei sich diese mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \mp \sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}}$$

in dem einen oder anderen Sinne bewegt.

Um nun bei dem Lagrangeschen Problem aus den bisherigen Gleichungen die Bewegung des Stempels und den Zustand der Gasmasse kennen zu lernen, der während der Fortbewegung der Grenzfläche bis zur ruhenden Wand gilt, und den Gossot und Liouville als die erste Welle bezeichnen, werden die Grenzbedingungen für $x = 0$, d. h. am bewegten Stempel herangezogen.

Hier gilt für die Masse M des Stempels und den Druck p der unmittelbar angrenzenden Gasschicht die Gleichung:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = -q \cdot p. \tag{30}$$

Da nun aber:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\varkappa} = \varphi(z) \tag{31}$$

ist, so entsteht aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{p_0 \cdot q}{M} \cdot (1+z)^{-\varkappa} = -\frac{dv}{dt}. \tag{32}$$

Nach der hier geltenden speziellen Annahme (31) und der Definition von $\psi'(z) = \left| \sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} \right|$ gilt also:

$$\psi(z) = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} \tag{33}$$

wo $c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}} \cdot \varkappa$ die Schallgeschwindigkeit in dem Gas bedeutet und daher:

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = \alpha$$

$$\text{für} \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}}$$

$$v + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = \beta$$

$$\text{für} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}}.$$

Im Punkte O (s. Abb. 3) ist zur Zeit $t = 0$: $v = 0$ und $z = 0$. $v - \psi(z)$ hat daher mit Einführung des Wertes von $\psi(z)$ den Wert $\beta = \frac{2c_0}{\varkappa - 1}$. Dieser Wert pflanzt sich längs der Kurve $\frac{dx}{dt} = \psi'(z)$ durch die Gasmasse fort. Am Stempel hat diese Kurve die Neigung: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{-\frac{\varphi'(0)}{\varrho_0}} = c_0$.

Da nun bei der Fortpflanzung des Wertes von $v - \psi(z)$ immer das Gebiet der Ruhe ($v = 0$, $z = 0$)

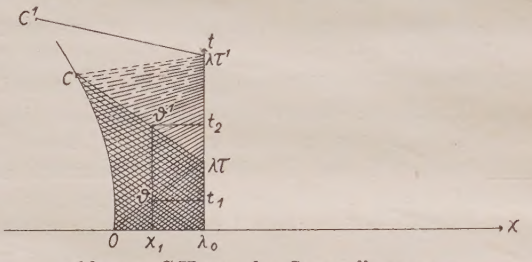


Abb. 3. C-Kurve der Stempelbewegung
$C\lambda_\tau = r_0$; $O\lambda_\tau = s_0$ (Verlauf der Grenzflächen)

getroffen wird, so behält die von der Ruhelage des Stempels aus gezogene Kurve $\frac{dx}{dt} = \psi'(z)$ immer die konstante Neigung $\psi'(z) = \sqrt{-\frac{\varphi'(0)}{\varrho_0}} = c_0$. Die Kurve ist also eine Gerade, die die feste Wand im Punkte λ_τ trifft. Auch von jedem anderen Punkte der x-Achse können solche Geraden gezogen werden, die demnach das Dreieck $O\lambda_0\lambda_\tau$ erfüllen. Wenn wir uns andererseits die Kurven $\frac{dx}{dt} = -\psi'(z)$ vom Stempel in seinen verschiedenen Lagen gezogen denken, so ist auf ihnen $v + \psi(z) = \text{const} = \alpha$. Da sie die x-Achse in Punkten treffen, für die $t = 0$ also $v = 0$, $z = 0$ ist, so resultiert hieraus für α der Wert: $\alpha = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1}$, welcher $v = 0$ und $z = 0$ entspricht.

Denkt man sich diese Kurven von allen Stempellagen aus bis zur festen Wand $\lambda_0\lambda_\tau$ gezogen, so ist auf ihnen immer $v + \psi(z) = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1}$, weil nämlich an den Stellen, wo die Kurven die x-Achse oder die feste Wand $\lambda_0\lambda_\tau$ treffen, $v = 0$ und $z = 0$ ist.

Nach den Bedingungen unseres Problems erhalten wir also eine Lösung, die in dem Gebiet $O\lambda_0\lambda_\tau$ der Gleichung

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1}$$

und

$$v + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = \frac{2c_0}{\varkappa - 1}$$

entspricht, d. h. in diesem Gebiet ist dauernd $v = 0$ und $z = 0$. Es ist also das Gebiet der Ruhe.

In dem von den Kurven $\frac{dx}{dt} = -\psi'(z)$ erfüllten Gebiet $OC\lambda_x$ gilt an allen Stellen, insbesondere auch an der Bewegungskurve OC des Stempels die Gleichung:

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1}. \quad (34)$$

Wir erhalten demnach eine den Bedingungen unseres Problems entsprechende Lösung auf folgendem Wege:

Für den Stempel erhält man aus der Kombination der Gleichungen (34) und (32) die Beziehung:

$$c_0 \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa+1}{2}} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{p_0 \cdot q}{M} \cdot (1+z)^{-\varkappa}. \quad (35)$$

Aus ihr folgt durch unmittelbare Integration:

$$(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = 1 + \frac{(\varkappa+1) \cdot q \cdot p_0}{2 \cdot M \cdot c_0} \cdot t. \quad (36)$$

Diese Gleichung gilt während der ganzen Dauer der ersten Welle, wie aber aus der Ableitung hervorgeht, nur für den Stempel, für den allein (32) gilt. Mit anderen Worten: Durch (36) in Verbindung mit (34) ist die Stempelbewegung gegeben, denn es resultiert hieraus eine Beziehung zwischen v und t für den Stempel.

Um nun aber auch an jeder Stelle x des Rohres die Geschwindigkeit und den Druck der Gasmasse zu ermitteln, differentiiert man Gleichung (34) nach x und erhält:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c_0 \cdot (1+z)^{-\frac{\varkappa+1}{2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad (37)$$

da nun aber:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{also:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

ist, so wird aus (37):

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c_0 (1+z)^{-\frac{\varkappa+1}{2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (38)$$

Ein Integral dieser Gleichung lautet:

$$t - \frac{x}{c_0} \cdot (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = F(z) \quad (39)$$

wo $F(z)$ zunächst eine beliebige Funktion von z ist. Für $x = 0$ wird aber $F(z) = t$; es ist aber nach (36):

$$(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = 1 + \frac{t}{h} \quad (40)$$

wenn:

$$h = \frac{2M \cdot c_0}{(\varkappa+1) \cdot q \cdot p_0} \quad (41)$$

gesetzt wird. Es ergibt sich daher für $x = 0$:

$$F(z) = h \cdot [(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} - 1]. \quad (42)$$

Da aber in (39) $F(z)$ für alle Werte von x dieselbe Funktion von z sein muß, so ist $F(z)$ durch den obigen Wert (42) allgemein gegeben. Also gilt mit diesem Ausdruck für $F(z)$ statt der Gleichung (39) die Beziehung:

$$t - \frac{x}{c_0} \cdot (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = h \cdot [(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} - 1]. \quad (43)$$

Somit kommt als Endresultat für eine Stelle x des Rohres:

$$(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = \frac{c_0 \cdot (t+h)}{x + c_0 h}. \quad (44)$$

Hieraus folgt nach (34)

$$v = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ \left[\frac{c_0 \cdot (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\}. \quad (45)$$

Schließlich erhält man aus (31) noch den Druck zu:

$$p = p_0 \cdot \left[\frac{c_0 \cdot (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}. \quad (46)$$

Da nun aber:

$$du = v \cdot dt + z \cdot dx$$

gilt, so liefert unter Berücksichtigung von (44) und (45) eine Integration dieser Formel:

$$u = \xi \cdot \left\{ \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \cdot \left(\frac{\Theta}{\xi} \right)^{\frac{2}{\varkappa-1}} - 1 - \frac{2}{\varkappa-1} \cdot \frac{\Theta}{\xi} \right\} \quad (47)$$

die Verrückung u, wobei:

$$\xi = x + c_0 h \text{ und } \Theta = c_0 (t+h)$$

zur Abkürzung gesetzt worden war.

Diese Gleichungen geben nun nicht schlechtweg die Werte von p und u an irgendeiner Stelle x zu irgendeiner Zeit, die bis zum Auftreffen der ersten Welle an der festen Wand verstreicht. Sondern nach dem vorher Gesagten gelten sie nur in dem Gebiete $OC\lambda_x$. Betrachten wir also irgendeine Stelle x des Rohres, so herrscht bis zu der Zeit, die dem Punkte ϑ entspricht, an dieser Stelle Ruhe; d. h. der Druck ist gleich dem Anfangsdruck p_0, Dann erst beginnt der Druck ge-

mäß Gleichung (46) sich mit der Zeit zu verändern. Unsere Lösung gilt bis zum Punkte ϑ'.[2])

D. Rechnerisches Beispiel

Ein Beispiel möge die Bedeutung dieser Lösung noch deutlicher hervorheben. Es sei der Druckverlauf im Rohr zu verschiedenen Zeiten berechnet. Derselbe wird von Gleichung (46)

$$p = p_0 \left[\frac{c_0 \cdot (t + h)}{x + t \cdot h} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}$$

dargestellt.

Angenommen seien die folgenden Daten:

$$\lambda = 12 \text{ cm}$$

$$p_0 = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

Ferner sei gegeben:

$$Mg = 10 \text{ g}; \quad g = 981 \text{ cm/sec}^2;$$

$$c_0 = 3{,}3 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}; \quad \varkappa = 1{,}4, \quad q = 0{,}5 \text{ cm}^2$$

Mit diesen Werten erhält man:

$$h = 2 \cdot 10^{-4} \qquad -\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} = -1{,}167$$

die Zeit, in der die erste Welle die feste Wand erreicht, ergibt sich zu:

$$T = \frac{\lambda}{c_0} = 3{,}63 \cdot 10^{-4} \text{ sec}.$$

Man muß daher zur Berechnung Zeiten wählen, die in dem Intervall:

$$0 \leqq t \leqq 3{,}63 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$$

liegen. Will man daher den Druckverlauf zu den Zeiten:

$$t = 10^{-4} \qquad t = 2 \cdot 10^{-4} \qquad t = 3 \cdot 10^{-4}$$

berechnen, so gilt die Formel (46) für diese Zeiten nur bis zu den x-Werten (vgl. Anm. 2):

$$x = 3{,}3 \qquad x = 6{,}6 \qquad x = 9{,}9.$$

Man erhält dann für den Druckverlauf die Tabelle 1.

Einen noch besseren Überblick über den Druckverlauf zu verschiedenen Zeiten kann man dadurch erhalten, daß man zunächst die Frage aufwirft, an welcher Stelle des Raumes sich der Stempel und die einzelnen Gasschichten, bezogen auf ein raumfestes Koordinatensystem, befinden. Für die Bewegung des Stempels gelten ja nun die Gleichungen (34) und (36):

$$\left.\begin{aligned} v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} &= -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \\ (1 + z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} &= 1 + \frac{t}{h}. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Die Elimination von $(1 + z)$ liefert dann:

$$v = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left[\left(1 + \frac{t}{h} \right)^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right] = \frac{dl}{dt}. \quad (49)$$

Dies ist die Stempelgeschwindigkeit, dargestellt in Abhängigkeit von der Zeit, wobei l diejenige Strecke angeben soll, um die sich der Stempel von seiner Ruhelage aus fortbewegt hat. Daher gilt für $t = 0$ und $x = 0$ auch $l = 0$.

---

[2]) Wie groß nun diese Zeiten in Wirklichkeit sind, in welcher die Gasschicht an der Stelle ϑ ($x = x_1$) von der ersten Welle getroffen wird, läßt sich aus der Gleichung der Geraden $O\lambda_\tau = \frac{dx}{dt} = c_0$ bestimmen. Nach ihr ist ja:

$$x = c_0 t \qquad (\alpha)$$

mithin für $x = x_1$ $[\vartheta_1 = (x_1, t_1)]$

$$t_1 = \frac{x_1}{c_0}.$$

Um auch den Punkt $\vartheta' = (x_1 t_2)$ bestimmen zu können, braucht man die Gleichung der Kurve $\lambda_\tau C$. Für sie gilt:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}}.$$

Nun war aber für das ganze abgeschlossene Gebiet $O\lambda_\tau C$: z durch (44) bestimmt. Daher kennt man auch:

$$\sqrt{-\frac{\varphi'(z)}{\varrho_0}} = c_0 (1 + z)^{-\frac{\varkappa+1}{2}} = \frac{x + c_0 h}{t + h}.$$

Infolgedessen gilt für $\lambda_\tau C$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x + c_0 h}{t + h}.$$

Die Integration ergibt:

$$(x + c_0 h)(t + h) = \text{const}. \qquad (\beta)$$

Die Konstante bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen $x = \lambda$, $t = \frac{\lambda}{c_0}$ zu:

$$\frac{1}{c_0} (\lambda + c_0 h)^2.$$

Mithin stellt die Gleichung (β) nach Einführung dieser Konstanten die Gleichung der Kurve $\lambda_\tau C$ dar und man erhält für $x = x_1$: $[\vartheta' = (x_1 t_2)]$

$$t_2 = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{(\lambda + c_0 h)^2}{(x_1 + c_0 h)} - h.$$

Tabelle 1

$\downarrow t$	$\rightarrow x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10^{-4}	p	1730	2060	2380	2710	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
$2 \cdot 10^{-4}$	p	1280	1450	1700	1990	2170	2450	2660	p_0	p_0	p_0	p_0
$3 \cdot 10^{-4}$	p	963	1000	1200	1410	1630	1820	2040	2350	2530	2640	p_0

Eine Integration von Gleichung (49) liefert:

$$l = c_0 h \cdot \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \cdot \left(1 + \frac{t}{h}\right)^{\frac{2}{\varkappa+1}} + \frac{2 c_0}{\varkappa - 1} \cdot (C - t). \tag{50}$$

Die Integrationskonstante C wird für $t = 0$ bestimmt zu:

$$C = -\frac{\varkappa + 1}{2} \cdot h.$$

Demnach:

$$l = c_0 h \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \cdot \left(1 + \frac{t}{h}\right)^{\frac{2}{\varkappa+1}} - \frac{2 c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left(\frac{\varkappa + 1}{2} \cdot h + t\right). \tag{51}$$

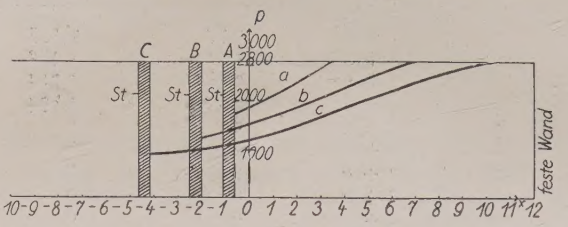
Diese Gleichung (51) gilt für jede Zeit t, solange noch der Zustand der ersten Welle fortdauert.

Interessant ist es nun aber auch, den Bewegungsverlauf der einzelnen Gasschichten in bezug auf das raumfeste Koordinatensystem kennen zu lernen. Man bedient sich zu diesem Zweck der Gleichung (47). Aus ihr folgen die Verrückungen der verschiedenen Schichten zu den verschiedenen Zeiten. Faßt man z. B. eine bestimmte Schicht ins Auge, die in dem variablen Koordinatensystem durch x_1 gegeben ist und berechnet sich für t_1, t_2, t_3, ... die Werte u_1, u_2, u_3, ..., so stellt $l_1 = x_1 + u_1$, $l_2 = x_1 + u_2$, $l_3 = x_1 + u_3$, ... die wahre Lage zu der jeweils geltenden Zeit dar.

In folgendem sei zu der Berechnung des angenommenen Beispiels zurückgegangen. Zunächst folgt aus (51) für die Lagen des Stempels im raumfesten System (Tabelle 2).

Da man nun den Druck an den Stellen x kennt, so gelten dieselben Werte des Druckes (Tabelle 1) im raumfesten Koordinatensystem an den Stellen $x + u$ (Tabelle 4).

Das Diagramm I gibt dann die Druckverteilung im Rohr in bezug auf das Koordinatensystem an. Hat man nämlich für eine Gasschicht



A = Lage des Stempels zur Zeit $t = 10^{-4}$ sec } im raumfesten System
B = „ „ „ „ „ $t = 2 \cdot 10^{-4}$ sec }
C = „ „ „ „ „ $t = 3 \cdot 10^{-4}$ sec }

a = Druckverlauf zur Zeit $t = 10^{-4}$ sec } im raumfesten System
b = „ „ „ „ $t = 2 \cdot 10^{-4}$ sec }
c = „ „ „ „ $t = 3 \cdot 10^{-4}$ sec }

Diagramm I

mit der sie charakterisierenden Koordinate x_1, zur Zeit t, den Druck p ermittelt, so ist dies dann der Druck, welcher an der Stelle im Rohre gilt, bis zu welcher die Gasschicht in der Zeit t_1 gelangt ist.

E. Lösung der ersten Welle nach der Beckerschen Methode

Die Lösungen, sowohl die von Gossot und Liouville, als auch die von Pidduc und Love befriedigen nicht, hinsichtlich ihrer Klarheit und Übersichtlichkeit. Es soll daher eine neue Darstellung für die erste Welle, wie auch der Weg gezeigt werden, auf welchem man einerseits mit einer Näherungsmethode, andererseits mit einer strengen wenn auch nicht expliziten Lösung die anderen Wellen behandeln kann.

Betrachtet man in der xt-Ebene irgendein Linienelement, so ändert sich irgendeine Funktion G längs desselben um den Betrag:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial G}{\partial t} \cdot dt. \tag{52}$$

Tabelle 2

t	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$
l	− 0,35	− 0,6	− 1,3	− 2	− 3,1	− 4,2	− 5,3

Ferner erhält man unter Benutzung der Gleichung (47) die Tabelle 3:

	$\rightarrow x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\downarrow t = 10^{-4}$	u_1	−0,28	−0,09	−0,19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	u_2	−0,81	−0,52	−0,29	−0,11	0	0	0	0	0	0	0	0
$2 \cdot 10^{-4}$	u_3	−1,44	−0,86	−0,48	−0,32	−0,12	−0,06	0	0	0	0	0	0
$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	u_4	−2,21	−1,29	−0,96	−0,64	−0,23	−0,13	−0,11	−0,02	0	0	0	0
$3 \cdot 10^{-4}$	u_5	−2,96	−2,06	−1,54	−1,3	−0,58	−0,5	−0,27	−0,15	−0,09	0	0	0
$3{,}5 \cdot 10^{-4}$	u_6	−4,56	−3,18	−2,21	−1,7	−1,28	−0,88	−0,54	−0,44	−0,31	−0,17	−0,09	0

und für die wahren Lagen der Gasschichten (Tabelle 4):

$\downarrow x$	$\rightarrow t$	10^{-4}	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$
1	$1+u$	0,77	0,195	−0,44	−1,21	−1,96	−3,56
2	$2+u$	1,914	1,482	1,14	0,71	−0,06	−1,18
3	$3+u$	2,981	2,712	2,52	2,04	1,46	0,79
4	$4+u$	4	3,894	3,682	3,37	2,73	2,3
5	$5+u$	5	5	4,884	4,77	4,42	3,72
6	$6+u$	6	6	5,94	5,87	5,5	5,12
7	$7+u$	7	7	7	6,89	6,73	6,46
8	$8+u$	8	8	8	7,99	7,85	7,56
9	$9+u$	9	9	9	9	8,92	8,69
10	$10+u$	10	10	10	10	10	9,83
11	$11+u$	11	11	11	11	11	10,91

Wählt man speziell:

$$G = v + \psi(z) \tag{53}$$

wobei $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $z = \frac{\partial u}{\partial x}$ gesetzt sein möge, so ist der Betrag der Änderung dieser Funktion längs (dx, dt) gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} d\left(v+\psi(t)\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx + \psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx \\ + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot dt + \psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\cdot dt. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Da sich nun Gleichung (8) mit

$$\varphi_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\varrho_0}\cdot\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

in der Form:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = +\varphi_1'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \tag{55}$$

schreiben läßt, so folgt, falls man aus (55) und (54) $\frac{\partial v}{\partial t}$ eliminiert und bedenkt, daß:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \text{ ist:}$$

$$\left.\begin{aligned} d\left(v+\psi(z)\right) = \frac{\partial z}{\partial t}\cdot dx + \psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\cdot dt \\ + \psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \varphi_1'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dt. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Nun verschwindet aber der Ausdruck auf der rechten Seite von (56) nur dann, wenn gleichzeitig

$$dx + \psi'(z)\cdot dt = 0 \tag{57}$$

$$\psi'(z)\cdot dx = -\varphi_1'(z)\cdot dt \tag{58}$$

ist. Daraus folgt, daß:

$$\frac{dx}{dt} = -\psi'(z) \tag{59}$$

$$\psi(z) = \pm\int\sqrt{\varphi_1'(z)}\cdot dz \tag{60}$$

für den Fall gilt, wo $v + \psi(z) = \text{const}$ ist. Versteht man also jetzt unter:

$$\psi(z) = \int\left|\sqrt{\varphi_1'(z)}\right| dz \tag{61}$$

so hat längs jeder der Kurven:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\varphi_1'(z)} = -\psi'(z) \qquad v+\psi(z) = r \tag{62}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\varphi_1'(z)} = \psi'(z) \qquad v-\psi(z) = s \tag{63}$$

einen konstanten Wert.

In den Punkten O und $2\lambda_0$ (vgl. Abb. 2) ist zur Zeit $t = 0 : v = 0$ und $z = 0$; $v - \psi(z)$ hat daher mit Einführung des Wertes von $\psi(z)$ nach (60) bzw. (33):

$$\psi(x) = -\frac{2c_0}{x-1}\cdot(1+x)^{-\frac{x-1}{2}} \text{ mit } c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}\cdot x}$$

den Wert:

$$s = s_0 = \frac{2c_0}{x-1} \tag{64}$$

im Punkte O. Für $v + \psi(z)$ gilt dann der Wert:

$$r = r_0 = -\frac{2c_0}{x-1} \tag{65}$$

im Punkte $2\lambda_0$. s_0 pflanzt sich längs der Kurve $\frac{dx}{dt} = \psi'(z)$ und r_0 längs $\frac{dx}{dt} = -\psi'(z)$ durch die Gasmasse fort. Am Stempel bei O bzw. $2\lambda_0$ haben diese Kurven die Neigung: $\psi'(z) = c_0$ bzw. $\psi'(z) = -c_0$. Da nun bei der Fortpflanzung der Werte von $v - \psi(x)$ und $v + \psi(z)$ immer das Gebiet der Ruhe ($v = 0$, $z = 0$) — bis sich $\frac{dx}{dt} = c_0$ und $\frac{dx}{dt} = -c_0$ in λ_z schneiden — getroffen wird, so behalten die von den Ruhelagen der Stempel aus gezogenen Kurven

$$\frac{dx}{dt} = \psi'(z) \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = -\psi'(z)$$

immer die konstanten Neigungen $\psi'(z) = c_0$ und

$\psi'(z) = -c_0$. Auch von jedem anderen Punkte der x-Achse können solche Geraden gezeichnet werden, die demnach das Gebiet $O\lambda_x 2\lambda_0$ erfüllen.

Wenn wir uns andererseits die Kurven $\frac{dx}{dt} = -\psi'(z)$ vom linken Stempel in seinen verschiedenen Lagen (die Kurve OC in Abb. 3) und $\frac{dx}{dt} = \psi'(z)$ vom rechten Stempel — ebenfalls von allen Punkten seiner Bahnkurve OC_1 — gezogen denken, so ist auf den ersten $v + \psi(z) = r = \text{const}$ und auf den zweiten $v - \psi(z) = s = \text{const}$. Da aber alle diese Kurven die x-Achse treffen, in Punkten, für die $t = 0$, also $v = 0$ und $z = 0$, so resultiert hieraus für r der Wert: $r = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1}$ und für s: $s = \frac{2c_0}{\varkappa - 1}$, welche $v = 0$ und $z = 0$ entsprechen. Nach den Bedingungen unseres Problems erhalten wir also das Resultat, daß in dem Gebiete $OC\lambda_x$, welches das Gebiet der ersten Welle bezüglich des linken Stempels genannt werden möge, mit Einschluß seiner Begrenzungen immer:

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{2}} = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \quad (66)$$

und in demjenigen $2\lambda_0 \lambda_x C'$ immer:

$$v + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{2}} = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \quad (67)$$

gilt.

Für die Bewegung der Stempel selbst gelten also:

I. linker Stempel: $(x = 0)$

1. das dynamische Grundgesetz:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{q \cdot g}{G} \cdot p = -\frac{q \cdot g \cdot p_0}{G} \cdot (1 + z)^{-\varkappa} \quad (68)$$

wobei G das Gewicht des Stempels bedeutet.

2. die Gleichung (24):

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{2}} = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \quad (69)$$

II. rechter Stempel: $(x = 2\lambda_0)$

1. das dynamische Grundgesetz:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{g \cdot q}{G} \cdot p = \frac{g \cdot q}{G} \cdot p_0 \cdot (1 + z)^{-\varkappa}. \quad (70)$$

2. die Gleichung (67):

$$v + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{2}} = +\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \quad (71)$$

Durch Kombination der Gleichungen (68) und (69) erhält man die Beziehung:

$$c_0 \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa + 1}{2}} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{q \cdot g}{G} \cdot p_0 \cdot (1 + z)^{-\varkappa}. \quad (72)$$

Aus ihr folgt durch unmittelbare Integration:

$$(1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} = 1 + \frac{(\varkappa + 1) \cdot q \cdot g \cdot p_0}{2 \cdot G \cdot c_0} \cdot t. \quad (73)$$

Zu dem gleichen Resultat wird man durch Anwendung der Gleichungen (70) und (71) geführt. Die Geschwindigkeit des linken Stempels erhält man aus (73) und (69), die des rechten aus (73) und (71). Fernerhin folgt aus $p = p_0 \cdot (1 - z)^{-\varkappa}$ auch der an beiden Stempeln herrschende Druck.

Für die Bewegung der Gasmasse bezüglich des linken Stempels gilt:

$$v - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{2}} = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \quad (74)$$

und für die bezüglich des rechten:

$$v + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa - 1}{1}} = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \quad (75)$$

Differentiiert man (74) und (75) partiell nach x, so folgt wegen $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c_0 \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa + 1}{2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (76)$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c_0 \cdot (1 + z)^{-\frac{\varkappa + 1}{2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \quad (77)$$

Zwei Integrale dieser Gleichungen sind:

$$t - \frac{x}{c_0} \cdot (1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} = F(z) \quad [\text{für } (76)] \quad (78)$$

$$t + \frac{x}{c_0} \cdot (1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} = \Phi(z) \quad [\text{für } (77)] \quad (79)$$

$F(z)$ und $\Phi(z)$ bedeuten zunächst noch beliebige Funktionen von z. Da aber nun für $x = 0$ und $x = 2\lambda_0$ nach (73) t gegeben war, so folgt allgemein:

$$F(z) = h \cdot \left[(1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} - 1\right] \quad (80)$$

mit:

$$h = \frac{2G \cdot c_0}{(\varkappa + 1) \cdot q \cdot g \cdot p_0}$$

und:

$$\Phi(z) = h\left[(1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} - 1\right] + \frac{\lambda_0}{c_0} \cdot (1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}}. \quad (81)$$

Demnach folgt:

$$(1 + z)^{\frac{\varkappa + 1}{2}} = \frac{c_0 \cdot (t + h)}{x + c_0 h} \quad (82)$$

für die erste Welle bezüglich des linken und:

$$(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = \frac{c_0 \cdot (t+h)}{2\lambda_0 + c_0 h - x} \tag{83}$$

bezüglich des rechten Stempels.

Fernerhin folgen dann nach (74) und (75) für die erste Welle bezüglich des linken Stempels:

$$v = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ \left[\frac{c_0 (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\} \tag{84}$$

$$p = p_0 \cdot \left[\frac{c_0 (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} \tag{85}$$

und bezüglich des rechten Stempels:

$$v = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda_0 + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\} \tag{86}$$

$$p = p_0 \cdot \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda_0 + c_0 h - x} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}. \tag{87}$$

Will man diese Formeln, die den Zustand der Gasmasse für die erste Welle angeben, rechnerisch verwerten, so muß man, um zu einer Zeit τ_1 den Zustand kennenzulernen, erst berechnen, bis zu welchem Orte die beiden aufeinander zulaufenden Teile der ersten Welle vorgedrungen sind; dazu dienen die Gleichungen:

$$x = c_0 t, \qquad X_e = c_0 \tau_1$$
$$x = 2\lambda_0 - c_0 t, \qquad X_r = 2\lambda_0 - c_0 \tau_1 .$$

Die erste derselben gilt für die Gasbewegung bezüglich des linken, die zweite für die bezüglich des rechten Stempels.

F. Lösung der zweiten Welle

Um diese Resultate ableiten zu können, war ein Spezialfall der allgemeinen Gleichungen (62) und (63) — $r = r_0$ bzw. $s = s_0$ — herangezogen worden.

Bei der Bewegung der Stempel treten aber auch für die Teile der ersten Welle die allgemeinen Gleichungen in Kraft, welche hier aussagen, daß bezüglich des rechten Stempels längs einer der Kurven:

$$\frac{dx}{dt} = -\psi'(z), \quad z \neq 0,$$

$v + \psi(z)$ den Wert $r = r_1 \neq r_0$

und bezüglich des linken Stempels:

$$\frac{dx}{dt} = \psi'(z), \quad z \neq 0,$$

$v - \psi(z)$ den Wert $s = s_1 \neq s_0$

hat, wenn man diesen Kurven die Deutung gibt, daß sie die Bewegung derjenigen Flächen innerhalb der Gasmasse darstellen, auf denen je zwei der jeweils an den Stempeln geltenden Grenzbedingungen entsprechende Lösungen der Hauptgleichung stetig ineinander übergehen. Dann stellt also beispielsweise AB (s. Abb. 4) den Verlauf einer

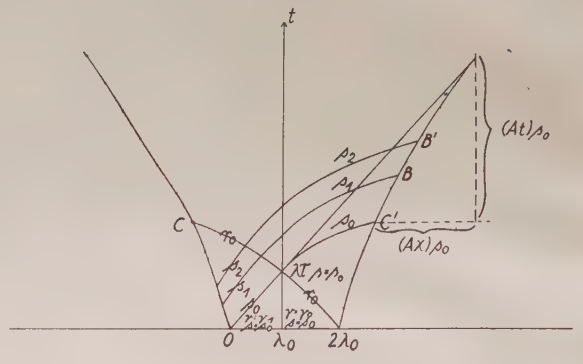


Abb. 4. Verlauf der Grenzfläche $s = s_0$ für exakte und angenäherte Lösung

solchen Fläche dar, für die $s = s_1$, $A'B'$ eine solche, für die $s = s_2$ ist. Die Werte von s_1, s_2, s_3, ... lassen sich aber mit Hilfe der bereits bekannten Formeln leicht berechnen; setzt man nämlich aus (83) und (86) v und z in:

$$s = v - \psi(z) \qquad (s = s_1, s_2, s_3, \ldots)$$

ein, so erhält man s als Funktion von x und t zu:

$$s = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\frac{c_0 \cdot (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\}. \tag{88}$$

Dasselbe gilt für $r_1, r_2, r_3, \ldots$; man hat aus (82) und (84) v und z in:

$$r = v + \psi(z) \qquad (r = r_1, r_2, r_3 \ldots)$$

einzuführen; dabei erhält man:

$$r = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \left[\frac{c_0 \cdot (t+h)}{2\lambda_0 + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \right\}. \tag{89}$$

Nimmt man umgekehrt ein bestimmtes r oder s an, z. B. $r = r_1$ und $s = s_1$, so liefern dieselben Gleichungen (76) und (77) aber in der Form:

$$t = \frac{1}{c_0} \cdot (x + c_0 h) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\varkappa - 1}{2c_0} \cdot s_1 + 1 \right] \right\}^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h \Bigg\} \tag{90}$$

$$t = \frac{1}{c_0} \cdot (2\lambda + c_0 h - x) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2c_0} \cdot r_1 \right] \right\}^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h \Bigg\} \tag{91}$$

den Verlauf derjenigen Grenzflächen, auf welchen $r = r_1$ und $s = s_1$ ist. Zu demselben Resultate würde man auch gelangen, falls man in

$$\frac{dx}{dt} = -\psi'(z) \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = +\psi'(z)$$

z durch (71) oder (70) ersetzen und dann integrieren würde, allerdings würden hier die Integrationskonstanten erst durch eine besondere Berechnung zu ermitteln sein.

Naturgemäß gelten die hier abgeleiteten Gleichungen nur für die Gebiete der ersten Welle. Daher lassen sich für letztere die Gleichungen (62) und (63) auch dahin deuten, daß:

1. Für die erste Welle bezüglich des linken Stempels (Gebiet $O C \lambda_x$)

$$r = r_0 = -\frac{2c_0}{\varkappa - 1} \tag{92}$$

$$s = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\frac{c_0 (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\} \tag{93}$$

2. Für die erste Welle bezüglich des rechten Stempels:

$$s = s_0 = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \tag{94}$$

$$r = \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \right\} \tag{95}$$

gelten muß.

Stellt man nun die Aufgabe, die Gleichungen der Kurven $2\lambda_0 C$ und $O C'$ aufzustellen, so kennt man bereits die Kurvenstücke $O \lambda_x$ und $2\lambda_0 \lambda_x$; dieselben sind gerade Linien und gegeben durch:

$$x = c_0 t \text{ für } O \lambda_x (\lambda = \lambda_0)$$

und: $x = 2\lambda - c_0 t$ für $2\lambda_0 \lambda_x (r = r_0)$

Außerdem ist aber nach Früherem (vgl. Anm. 2) die Gleichung des Kurvenstückes $C \lambda_x$ bereits gegeben, es war:

$$c_0 \cdot (x + c_0 h)(t+h) = (\lambda + c_0 h)^2 \text{ für } C \lambda_x (r = r_0).$$

Die Berechnung der Kurvengleichung von $\lambda_x C'$ geschieht auf ähnlichem Wege, wie in Anm. 2, hier gilt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\lambda + c_0 h - x}{t + h}$$

oder:

$$c_0 \cdot (2\lambda + c_0 h - x)(t+h) = (\lambda + c_0 h)^2$$
$$\text{für } C' \lambda_x (s = s_0)$$

so daß man also sagen kann:

Für $r = r_0$ gilt:

1. von $2\lambda_0$ bis λ_x: $t = \frac{1}{c_0} \cdot (2\lambda - x)$ (96)

2. von λ_x bis C: $t = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{(\lambda + c_0 h)^2}{x + c_0 h} - h$ (97)

Für $s = s_0$ gilt:

1. von O bis λ_x: $t = \frac{x}{c_0}$ (98)

2. von λ_x bis C': $t = \frac{1}{c_0} \frac{(\lambda + c_0 h)^2}{2\lambda + c_0 h - x} - h$ (99)

Da es sich nun hier darum handeln soll, eine Näherungslösung des Problems für die zweite Welle zu finden, so könnte man die Frage aufwerfen: Läßt sich Gleichung (96) und (98) auch in dem Intervall $\frac{\lambda}{c_0} \leqq t \leqq T$ — es bedeute T die Zeit, in der die zweite Welle die Stempel in C und C' trifft — verwenden und unter welchen Bedingungen verspricht diese Annahme Erfolg?

Diese Frage läßt sich beantworten, wenn man die Differenzen sowohl von (96), (97) als auch von (98), (99) bildet, denn dieselben geben ja den Unterschied zwischen den wahren aus (97) und (99) und den näherungsweise berechneten Werten der Zeit an. Die Subtraktion von (97) und (96) liefert:

$$(\Delta t)_{r=r_0} = \frac{(\lambda - x)^2}{c_0 (x + c_0 h)}. \tag{100}$$

Ebenso liefert die Subtraktion von (45) und (44):

$$(\Delta t)_{s=s_0} = \frac{(\lambda - x)^2}{c_0 (2\lambda + c_0 h - x)}. \tag{101}$$

Am bequemsten kann man sich über das Verhältnis von $(\Delta t)_{r=r_0}$ zu dem aus (42) folgenden Wert von t eine Vorstellung machen, wenn man den ferneren Untersuchungen ein praktisches Beispiel zugrunde legt. Es sei:

$$p_0 = 2800 \text{ kg/cm}^2,\ \lambda = 3 \text{ cm},\ 2\lambda = 6 \text{ cm},$$
$$c_0 = 9{,}3 \cdot 10^4 \text{ cm/sec},\ G = 10 \text{ g},\ \varkappa = 1{,}4,\ q = 0{,}5.$$

Die gegenüber der früheren geänderte Größe von c_0 entspringt der Überlegung, daß die Temperatur der Pulvergase im Militärgewehr — für dasselbe gilt dieser Versuch — nicht 0^0 ist, denn hierfür gilt allein der Wert $c_0 = 3{,}3 \cdot 10^4$, sondern beträchtlich höhere Werte hat. Nimmt man z. B. $t = 2000^0$ (die Temperatur der Pulvergase schwankt während des Schusses zwischen 3000 und 1500^0), so folgt aus:

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0} \cdot \varkappa \cdot (1 + \alpha t)}$$

der obige Wert von c_0 und damit:

$$h = 5{,}77 \cdot 10^{-4}.$$

Dann ergibt sich für $x = 0$:

$$t = \frac{2\lambda}{c_0} = 6{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$$

und:

$$\Delta t = \frac{\lambda^2}{c_0^2 h} = 1{,}72 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

daher der wahre Wert von t:

$$t = 6{,}462 \cdot 10^{-5} \text{ sec}.$$

Der Fehler, welcher in die Rechnung eingeht, beträgt $2{,}74\,\%$ — ein Resultat, das für die experi-

mentelle Berechnung durchaus brauchbar ist. Macht man nun die Annahme, daß das hier erhaltene Resultat auf jede einzelne Kurve der r- und s-Schar — also auch auf (93) und (95) — angewendet werden darf, weil die Bewegung der Gasmasse eine stetige sein soll, so folgt, daß die Gleichungen (93) und (95) auch noch im Gebiete der zweiten Welle die Kurven darstellen, für welche $v + \psi(z) = r$ und $v - \psi(z) = s$ ist. Dann ist aber damit das Problem der zweiten Welle mit einem Schlage gelöst; da nämlich:

$$v = \frac{r+s}{2}, \quad \psi(z) = \frac{r-s}{2} \quad \text{und} \quad p = f(z)$$

ist, so folgt, da nun r und s als Funktionen von x und t bekannt sind mit Einsetzen dieser Werte:

$$v = \frac{2\,c_0}{\varkappa - 1} \cdot \left\{ \left[\frac{c_0 \cdot (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \right\} \tag{102}$$

$$(1+x)^{-\frac{\varkappa-1}{2}} = \left[\frac{c_0 (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} + \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \tag{103}$$

$$p = p_0 \cdot \left\{ \left[\frac{c_0 (t+h)}{x + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} + \left[\frac{c_0 (t+h)}{2\lambda + c_0 h - x} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\} \tag{104}$$

Es ist aber auch die Möglichkeit gegeben, eine Lösung der zweiten Welle zu finden, die von jeder vereinfachenden Annahme absieht und nur auf der Grundannahme des ganzen Lagrangeschen Problems beruht, nämlich auf der stetigen Bewegung der Gasmasse. Der Lösungsgang ist folgender:

Die Gleichungen (78) und (79) gelten auch ohne jede Vernachlässigung im Bereich der zweiten Welle, vorausgesetzt, daß man, entsprechend den Überlegungen des vorigen Paragraphen, die Differenz des so berechneten und des wahren t-Wertes hinzufügt; also:

$$t_s = \frac{1}{c_0} \cdot (x + c_0 h) \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\varkappa - 1}{2\,c_0} s + 1 \right] \right)^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h + (\Delta t)_s \tag{105}$$

$$t_r = \frac{1}{c_0} \cdot (2\lambda + c_0 h - x) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2\,c_0} \cdot r \right) \right]^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h + (\Delta t)_r \tag{106}$$

Es handelt sich also nur um die Bestimmung von $(\Delta t)_s$ und $(\Delta t)_r$. Jetzt ist aber für $r = r_0$ und $s = s_0$: $(\Delta t)_r$ und $(\Delta t)_s$ bekannt:

$$(\Delta t)_{r_0} = \frac{(\lambda - x)^2}{c_0 (x + c_0 h)} \tag{107a}$$

$$(\Delta t)_{s_0} = \frac{(\lambda - x)^2}{c_0 (2\lambda + c_0 h - x)} \tag{107b}$$

Wegen der Stetigkeit der Gasbewegung wird nun jeder einzelne Wellenteil nach demselben Gesetze von den entgegenkommenden Wellen beeinflußt, wie der gleich vorhergehende bzw. nachfolgende. Hat man nun das Gesetz der gegenseitigen Beeinflussung für eine einzige Welle gefunden, so gilt dasselbe eben wegen der Stetigkeit auch für alle anderen. Dieses Gesetz, welches angeben soll, um wieviel ein Wellenteil hinter dem Ort zurückbleibt, welchen er erreichen würde, falls er sich in die ruhende Gasmasse fortpflanzt, ist aber in (107a und b) enthalten; man hat nur $(\Delta x)_r$ und $(\Delta x)_s$ zu berechnen; es folgt:

$$(\Delta x)_{s_0} = \frac{(\lambda - c_0 t)^2}{c_0 (t+h)} \tag{108}$$

und:

$$(\Delta x)_{r_0} = \frac{(\lambda - c_0 t)^2}{c_0 (t+h)} \tag{109}$$

Nimmt man nun in den Gleichungen (107a und b) $\lambda = \Gamma$ als veränderlich an, nämlich gleich dem Werte von x, der sich als Abszisse des Schnittpunktes irgendeiner Kurve der r- oder s-Schar, entsprechend einer der beiden Gleichungen (93) oder (95) mit einer der beiden Kurven r_0 oder s_0, gegeben durch (96) bzw. (98), ergibt, so ist für die zweite Welle der Verlauf der Grenzflächen gegeben durch:

$$t_s = \frac{1}{c_0} \cdot (x + c_0 h) \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varkappa - 1}{2\,c_0} \cdot s + 1 \right) \right]^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h + \frac{(\Gamma_s - x)^2}{c_0 (x + c_0 h)} \tag{110}$$

$$t_r = \frac{1}{c_0} \cdot (2\lambda + c_0 h - x) \left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2\,c_0} \cdot r \right) \right]^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - h + \frac{(\Gamma_r - x)^2}{c_0 (2\Gamma + c_0 h - x)} \tag{111}$$

wobei hier Γ veränderlich ist. Man erkennt nun aber leicht, daß damit auch das Problem der zweiten Welle erledigt ist; der Rechnungsgang ist folgender: Man wähle aus der Schar der r und s Kurven zwei heraus: $r = r_1$ und $s = s_1$; dann kennt man:

$$v = \frac{r_1 + s_1}{2} \qquad \psi(z) = \frac{r_1 - s_1}{2} \qquad p = f(z)$$

und aus (110) und (111) folgt die dazugehörige Zeit und die Wegkoordinate x, nachdem erst Γ_r und Γ_s auf dem angegebenen Wege bestimmt worden sind.

G. Das Lagrangesche Problem und die innere Ballistik

Wenn es sich nun darum handeln soll, das Lagrangesche Problem mit der inneren Ballistik in Beziehung zu setzen und die erhaltenen Resultate mit der Wirklichkeit zu vergleichen, so sei zunächst kurz einiges über das innerballistische Hauptproblem mitgeteilt.

Um die Bewegung des Geschosses im Rohr bzw. Lauf auf den Grundlagen der Mechanik und Thermodynamik unter Zuhilfenahme der Gesetze für die Abhängigkeit der Pulververbrennung vom Gasdruck zu berechnen, wird unter anderem auch die Grundgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} = q \cdot p \qquad (112)$$

für die Bewegung des Geschosses m unter dem auf seinen Querschnitt q ausgeübten Gasdruck p aufgestellt. Da aber nicht allein die Geschoßmasse m beschleunigt wird, sondern auch die Pulvergase, so haben sich die meisten Theoretiker dadurch geholfen, daß sie zu der Masse m einen Bruchteil der Pulverladung ω hinzufügen und beispielsweise (Sébert):

$$M = m + \tfrac{1}{2}\omega \qquad (113)$$

setzen. Allgemeiner läßt sich die scheinbare Masse des Geschosses ausdrücken durch:

$$M = m + \Theta \cdot \omega \qquad (114)$$

wobei nun der Faktor Θ seinerseits erst zu bestimmen wäre; nach Sébert ist $\Theta = \frac{1}{2}$.

Nachdem man dann aus Rücklaufmessungen die Zeit-Weg-Kurve des Laufes erhalten hat, ergeben sich mit Hilfe des Schwerpunktssatzes und dadurch, daß man nach Sébert $\Theta = \frac{1}{2}$ setzt, leicht auch die auf das Geschoß zu beziehenden Werte des Weges x_g, der Geschwindigkeit v_g und des Druckes p_g. Es ist nämlich:

$$\left(R + \frac{\mu}{2}\right) \cdot x_R = \left(G + \frac{\mu}{2}\right) \cdot x_g \qquad (115)$$

(x_R = Rücklaufweg, R = Rohr-, G = Geschoß-, $\mu = \omega \cdot g$ = Ladungsgewicht). Fernerhin ist, wenn v_R die Rücklaufgeschwindigkeit bezeichnet, die Geschoßgeschwindigkeit v_g gegeben durch:

$$v_g \cdot \left(G + \frac{\mu}{2}\right) = v_R \cdot \left(R + \frac{\mu}{2}\right) \qquad (116)$$

Schließlich erhält man noch für die Drucke p_g und p_R auf Geschoß- und Laufboden durch:

$$p_g = \frac{G}{q \cdot g} \cdot \frac{d v_g}{d t} \quad \text{und} \quad p_R = \frac{R}{q \cdot g} \cdot \frac{d v_R}{d t} \qquad (117)$$

somit:

$$p_g = p_R \cdot \frac{R}{G} \cdot \frac{R + \frac{\mu}{2}}{G + \frac{\mu}{2}} \qquad (118)$$

Wendet man dann die so erhaltenen Formeln auf ein praktisches Beispiel an, mit anderen Worten, berechnet man beispielsweise nach (116) die Mündungsgeschwindigkeit v_g des Geschosses aus den zugehörigen Rücklaufsdaten, so findet man, daß der erhaltene Wert nicht mit dem übereinstimmt, den man nach einer der vorhandenen Methoden direkt experimentell mißt.

Bollé erklärt dieses Ergebnis dahin, daß bei der angewandten Schlittenführung des Rücklaufmessers, bei welcher die Seelenachse über der Gleitbahn liegt, ein Kippmoment entsteht, welches, zumal in Verbindung mit transversalen Laufschwingungen, die Reibung der weit auseinanderstehenden Schlitten beim Schuß selbst stark erhöht, auch wenn diese beim Zurückschieben des Laufes mit der Hand sehr klein erscheint.

Daß diese Erklärung den Tatsachen gerecht wird, zeigt sich bei einem von Bollé unternommenen Versuch, wobei der Lauf um 230 g beschwert und somit oben angegebener Einfluß verringert war. Die erhaltenen Werte stimmen bereits weit besser überein.

Zieht man das Lagrangesche Problem zu diesen Betrachtungen hinzu, so könnte man erwarten, zu einem Aufschluß über den Wert von Θ geführt zu werden, wenigstens, wenn man annimmt, daß vom Eintreten des Maximaldruckes ab alles Pulver vergast ist. Es seien hier die Verhältnisse der Drucke einer näheren Betrachtung unterzogen. Es sei durch p_r der Druck an der festen Wand (Stoßboden des Laufes) und durch p_g der Druck auf den Stempel (Geschoß) bezeichnet. Nimmt man dann:

$$p_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2; \quad \frac{\mu}{G} = \frac{1}{3}; \quad \varkappa = 1{,}4;$$

$$\lambda = 6{,}6 \text{ cm}$$

und die Schallgeschwindigkeit in den erhitzten Pulvergasen zu:

$$c_0 = 9{,}53 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$$

an, so folgt für die erste Welle aus:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 \cdot \left[1 + \frac{t}{h}\right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} \\ p_g : p_R &= p : p_0 \end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

gültig von $t = 0$ bis $t = 6{,}92 \cdot 10^{-5}$ sec die Tabelle:

$t =$	10^{-5}	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$6{,}92 \cdot 10^{-5}$
$p_g : p_R =$	0,978	0,958	0,9195	0,884	0,868

Bedient man sich, um auch für die zweite Welle bis zu ihrem Auftreffen auf den Stempel das Verhältnis $p_g : p_R$ zu bestimmen, der im voraufgegangenen Kapitel abgeleiteten Näherungsformeln, so folgt für die feste Wand:

$$p_R = p_0 \cdot \left[2 \cdot \left\{ \frac{c_0 (t+h)}{\lambda + c_0 h} \right\}^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} \qquad (120)$$

wobei hierbei $p_0 = 3000$ bleibt. Außerdem gilt auch hier:

$$p_g = p_0 \cdot \left[1 + \frac{t}{h} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} \qquad (121)$$

Daher:

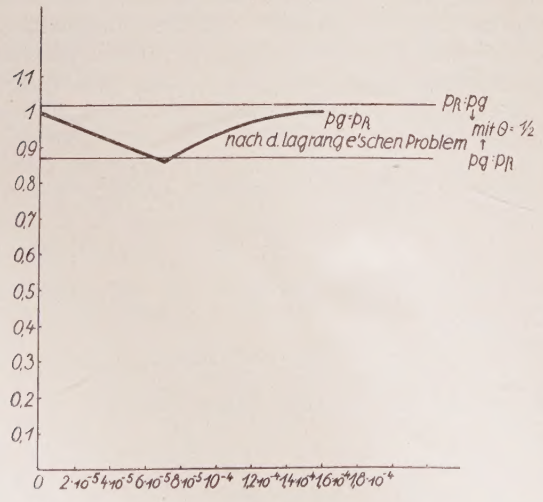
$$p_g : p_R = \left[1 + \frac{t}{h} \right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\frac{c_0 (t+h)}{\lambda + c_0 h} \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} - 1 \right\}^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} \qquad (122)$$

gültig von $t = 6{,}92 \cdot 10^{-5}$ bis $t = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ sec. Man erhält die Tabelle:

$t =$	$8 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$
$p_g : p_R =$	0,891	0,925	0,96	0,997	1,051

Berechnet man aber aus (5) das Verhältnis von $p_g : p_R$, so ist, weil R sehr groß gegen $\mu/2$ ist, sehr angenähert:

$$p_R : p_g = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{G} = 1{,}15; \quad \text{daher } p_g : p_R = 0{,}87$$



(Abszisse = Zeitachse, Ordinate $p_g : p_R$ bzw. $p_R : p_g$)
Verhältnis der Drucke $p_g : p_R$

Diagramm II

Das Diagramm II zeigt für die erste und zweite Welle des Lagrangeschen Problems die Veränderlichkeit des Wertes $p_g : p_R$. Man erkennt, wie das Druckverhältnis in dem durch dieses Problem beschriebenen Prozesse sich in dem Augenblick, wo die erste Welle die feste Wand erreicht, dem Werte 0,87 und in dem, wo die zweite Welle den Stempel trifft, dem Werte 1,15 nähert. Man würde also für $p_g : p_R$ nach dem Lagrangeschen Problem den Mittelwert:

$$p_g : p_R = 0{,}942$$

erhalten.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Der sich hieraus ergebende Wert von Θ ist wesentlich kleiner als der bei der Berechnung von Rücklaufmessungen angenommene. Die Rücklaufmessungen sagen aber über den Wert von Θ durch Vergleich der aus ihnen ermittelten und der direkt gemessenen Mündungsgeschwindigkeit nur etwas aus für große Geschoßwege in der Nähe der Mündung. Wie sich hierzu, bei so großen Stempelwegen, die Lösung des Lagrangeschen Problems stellen würde, könnte nur die bis zu Wellen hoher Ordnung durchzuführende sehr mühevolle Berechnung ergeben. Die hier ausgeführten Rechnungen würden mit den experimentellen Ergebnissen von Rücklaufmessungen nur verglichen werden können, wenn man die Geschwindigkeiten des Geschosses in der Nähe der Stelle, an welcher der angenommene Maximalgasdruck von 3000 kg/cm² eintritt, direkt messen, und mit den an dieser Stelle aus der Rücklaufkurve ermittelten vergleichen könnte, oder auch, wenn man gleichzeitig den Druck auf den Laufboden, den die Rücklaufmessungen, abgesehen von der Geschoßreibung, unabhängig vom Lagrangeschen Problem richtig ergeben müssen, mit dem gemessenen Druck auf den Geschoßboden vergleichen könnte. Derartige Messungen sind aber äußerst schwierig und bisher noch nicht durchgeführt worden. Gerade dieser Umstand war es aber, der Gossot und Liouville u. a. veranlaßt hat, die experimentell schwer zu entscheidende Frage auf theoretischem Wege zu lösen.

Zur experimentellen Prüfung der Theorie sind daher die bisherigen Rücklaufmessungen nur teilweise heranzuziehen. Eine experimentelle Prüfung wäre aussichtsvoll durch Rücklaufmessungen mit glatten Rohren, ohne wesentliche Geschoßreibung, bei denen durch sehr schnell vor einer wesentlichen Geschoßbewegung verbrennende Pulver die Bedingungen des Lagrangeschen Problems hergestellt würden.

Zusammenfassung

Die Lösung des Lagrangeschen Problems, die bereits von Gossot und Liouville unternommen worden ist, beruht insbesondere auf der Theorie der Grenzflächen bzw. der Charakteristiken.

Nach Ableitung der Hauptgleichung erhalten Gossot und Liouville mit Hilfe der Betrachtung über Grenzflächen und durch Einführung der Grenzbedingung am Stempel und der Anfangsbedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Gasmasse in Ruhe ($v = 0$; $z = 0$) sein soll, die Lösung der ersten Welle.

Es ist dann nochmals die Lösung der ersten Welle des erweiterten Lagrangeschen Problems nur mit Hilfe der Theorie der Charakteristiken abgeleitet worden. Außerdem wird eine Näherungsmethode für die Lösung der zweiten Welle angegeben und eine strenge Lösung, die zwar nicht die Formeln der zweiten Welle in expliziter Form liefert, wohl aber die praktische Berechnung von Beispielen gestattet.

Zum Schluß der Arbeit wird näher erläutert, weswegen und unter welchen Gesichtspunkten das Lagrangesche Problem in der inneren Ballistik eine Anwendung finden kann. Es wird eine Berechnung über das Verhältnis der Drucke auf Lauf- und Geschoßboden in einem 8 mm Gewehr auf Grund der nach der oben dargelegten Theorie erhaltenem Ergebnisse durchgeführt.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Dr. E. Bollé ausgeführt, dem ich an dieser Stelle für das fördernde Interesse, mit dem er den Fortgang derselben begleitete, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen möchte.

Lebenslauf

Ich, Joachim Scholz, preußischer Staatsangehöriger, wurde am 27. März 1903 zu Berlin geboren. Mein Vater war Gesanglehrer am Falkrealgymnasium zu Berlin, wo auch ich meine Schulausbildung erhielt. Ostern 1921 verließ ich diese Anstalt mit dem Zeugnis der Reife und widmete mich dem Studium der Physik an der Universität Berlin.

Ich hörte Vorlesungen, Übungen und Seminare folgender Herren Professoren und Dozenten:

Schur, Rubens, Planck, Nernst, Dessoir, Hamburger, Rademacher, Wehnelt, Cranz, Koehler, v. Laue, v. Mises, Blasius, E. Schmidt, Riehl, Becker, Szegö und Vierkandt.

Ihnen allen, besonders Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. M. Planck, Herrn Prof. Dr. Wehnelt und Herrn Dr. Becker gilt mein aufrichtigster Dank.